**Введение**

Системный анализ является основой для проектирования и создания сложных проектов – технических систем, сложных процессов, характерными особенностями которых являются: наличие большого числа элементов разной природы, функционирующих в проекте, и сложная схема взаимодействия между ними; большая степень неопределенности в описании поведения элементов проекта, многокритериальность целевой функции проекта, причем не всегда четко известны критерии и их соотношения, наличие случайных факторов, влияющих на качество выполнения проекта и его функционирование.

Быстрая и экономная, с финансовой точки зрения, материальной, реализация таких проектов возможна только при математическом моделировании возможных вариантов решения данного проекта. Одной из задач, возникающих при этом, является разработка математических моделей поведения элементов систем на основе физических законов их функционирования, либо на основе обработки статистической информации об их функционировании на определенном интервале времени. Другой задачей является определение поведения элементов системы и самой системы в реальных условиях при действии возмущающих факторов, влияющих на конечный результат ее работы. Решение этой задачи сводится к определению действительных характеристик случайных факторов, которые в большей части являются случайными величинами или функциями, влияющих на поведение системы, разработке датчиков случайных чисел для задания этих возмущений в математической модели поведения системы, а также при оценке параметров математической модели системы на основе результатов наблюдений за ее поведением.

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N 1**

**РАЗРАБОТКА ДАТЧИКА СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ, РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ ЗАКОНУ**

Для получения случайных чисел, используемых при моделировании на ЭВМ, применяют алгоритмические датчики случайных чисел, причем вначале получают случайное число, распределенное по равномерному закону в интервале [0,1], а затем, используя его, случайную величину, имеющую заданный закон. При алгоритмическом способе случайные числа получают путем выполнения операций над числами. Строго говоря, такие числа не являются случайными, т.к. при каждом новом обращении при решении задачи они дают ту же случайную последовательность, что и в предыдущем обращении. Поэтому их называют псевдослучайными.

Удобства этого способа состоит в том, что на получение числа затрачивается несколько простых операций, поэтому скорость нахождения псевдослучайных чисел имеет тот же порядок, что и быстродействие ЭВМ, программа для вычисления занимает очень мало места, используемую программу для получения псевдослучайных чисел достаточно проверить один раз на соответствие требуемому закону, и потом ею можно пользоваться сколько угодно раз.

Рассмотрим датчик случайных чисел, распределенных по равномерному закону, использующий удобный в программировании алгоритм. Он следующий: сначала задают два иррациональных числа

*А*=3,14159265 , *В*=0,542101887.

и находят сумму

.

Если , то , если , то *S*=.

Случайное число вычисляем по формуле

.

Изменяем значения *А* и *В* на новые: *А*=*В*, *В*=*S.* Эти переменные *А* и *В* запоминаются и при следующем обращении к датчику случайных чисел используют уже эти новые значения *А* и *В*.

Таким образом, при использовании датчика случайных чисел необходимо задать вначале перед первым обращением указанные значения переменным *А* и *В*. Новые значения эти переменные получат в подпрограмме.

Теперь, имея случайную величину *V*, распределенную по равномерному закону на интервале [0,1], получим случайную величину ξ, распределенную по требуемой функции плотности вероятности на интервале [a,b].

Величину ξ надо находить из уравнения

т.е., получив очередное значение *V* надо решить записанное выше уравнение. Вычисленное **ξ** и будет случайной величиной, распределенной по требуемому закону.

Для получения решения этого уравнения вычислим интеграл и подставим границы интегрирования. Получим

F(a, ξ) = V.

Это алгебраическое уравнение с неизвестной ξ. Решение его можно осуществить любым численным методом.

Для получения нового случайного числа снова обращаемся к датчику равномерно распределенных чисел V и опять решаем это же уравнение с новой правой частью. Таким образом, получаем требуемое количество случайных величин, распределенных по закону .

Для проверки правильности работы датчика необходимо построить гистограмму распределения случайной величины ξ. Для этого получаем N случайных чисел (i= 1…N). Задаем число интервалов К, на которое разбиваем интервал [а,b] области существования функции плотности вероятности Определяем границы каждого интервала Задаем вектор В из К элементов. Проверяем сколько случайных чисел ξ попало в каждый интервал. Полученное для каждого интервала i число вносим в элемент i вектора В. Затем делим все значения элементов вектора В на число случайных чисел N и на h, где h величина каждого интервала и равна

h=(b - a)/К.

Получили вектор чисел , задающих интенсивность попадания случайных чисел (i= 1…N) в каждый интервал отрезка [a,b].

Строим на экране компьютера гистограмму, используя вектор . На этом же графике рисуем график функции плотности вероятности Если гистограмма и график близки, то датчик случайных чисел работает правильно. С увеличением числа N они совпадают.

**Задание на выполнение лабораторной работы**

Разработать датчик случайных чисел, распределенных по заданному закону. Вид закона и интервал распределения задает сам учащийся. При задании функции плотности вероятности необходимо учесть, что в области ее существования она положительна, интеграл от нее на интервале [a,b] равен единице. Для удовлетворения первому условию студент должен проанализировать выбранную функцию и выбрать интервал [a,b] там, где она положительна. Для удовлетворения второму условию поступаем следующим образом.

Вычисляем интеграл от функции на интервале [a,b]. Получаем

S=.

Задаем новую функцию плотности вероятности

Интеграл от нее на интервале [a,b] равен единице. Для этой функции разрабатываем датчик случайных чисел.

При задании использовать нелинейную зависимость.

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2**

**РАЗРАБОТКА ДАТЧИКА СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ, РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПО ГАУССОВСКОМУ ЗАКОНУ**

Наиболее часто в расчетах используют случайные числа, распределенные по нормальному или гауссовскому закону распределения. Соответствующие ему случайные числа можно получить рассмотренным в первой лабораторной работе способом. Однако на практике с целью сокращения объема вычислений используют другой способ, основанный на центральной предельной теореме. Согласно ей при сложении достаточно большого числа случайных величин, распределенных по любому закону, получается случайная величина, распределенная, примерно, по нормальному (гауссовскому) закону. Исследования показали, что при сложении уже шести случайных величин , распределенных по равномерному закону, получается случайная величина, которую можно считать распределенной по нормальному закону. Поэтому, в подпрограмме датчика нормально распределенных случайных величин используется вычисление шести равномерно распределенных случайных величин . В этом случае гауссовскую случайную величину W с математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением определяем по формуле

В подпрограмме датчика случайных чисел, распределенных по нормальному закону, необходимо перед первым обращением к датчику равномерно распределенных случайных чисел задать значения переменных

*А*=3,14159265, *В*=0,542101887.

При вычислении гауссовской случайной величины необходимо задавать ее математическое ожидание и значение дисперсии.

**Задание на выполнение лабораторной работы**

Используя датчик равномерно распределенных случайных чисел получить гауссовскую случайную величину. Значение ее математического ожидания равно номеру N студента в журнале, величина дисперсии равна . Правильность программы проверить, как и в первой лабораторной, построением на одном графике гистограммы гауссовской величины и ее функции плотности вероятности.

При защите лабораторных работ знать основные понятия о случайных величинах, их характеристиках и формулах их вычисления, операциях со случайными величинами. Уметь осуществлять вывод формул, даваемых по данной тематике на лекциях и используемых в лабораторных работах.

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3**

**МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С ВЕСОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

При создании математических моделей сложных систем разной природы необходимо передаточные функции ее элементов. В зависимости от их вида возможны два подхода решения этой задачи. Если процессы в элементе подчиняются законам физики, говорят система хорошо формализуема, то передаточную функцию определяют на основании этих законов. Если этого нет, система плохо формализуема, то передаточную функцию строят на основе статистической информации о значения сигнала на входе элемента и его выходе. Часто эта функциональная зависимость является алгебраической. В этом случае при одном аргументе наиболее часто используется метод наименьших квадратов. При его использовании имеют вектор входных величин и соответствующий ему вектор выходных. Из анализа вида выходной функции выбирают соответствующие ему функции и задают математическую модель процесса как сумму этих функций с некоторыми неизвестными коэффициентами. Затем, задаем критерий качества аппроксимации реального процесса математической моделью. Он представляет сумму квадратов отклонений измеренных значений на выходе элемента от соответствующих вычисленных по математической модели. Теперь задача сводится к нахождению таких числовых значений коэффициентов перед функциями математической модели, при которых критерий качества имеет минимальное значение. Полученная функция при этих значениях коэффициентов и будет математической моделью передаточной функции элемента системы.

Недостатком такого подхода является то обстоятельство, что элементы вектора выходных величин являются случайными, т.к. получены с использованием измерительных средств, имеющих ошибки измерений. Величины этих ошибок могут быть разными в зависимости от измеряемой величины и условий измерений. В связи с этим появляется целесообразность при построении математической модели в большей мере учитывать измерения, имеющие меньшую погрешность измерений, и в меньшей, имеющие большие погрешности. Осуществляют это использую метод наименьших квадратов с весовыми коэффициентами.

Считаем, что нам известны вектор выходных величин – вектор измерений W, соответствующий ему вектор аргументов X, а также среднеквадратическое отклонение погрешности измерений каждого элемента вектора W. Обозначим этот вектор S. Все вектора имеют N элементов.

Зададим аппроксимирующую функцию выходных значений элемента системы в виде суммы базисных функций

Z=,

В этом случае элементу вектора измерений Wn , будет соответствовать

элемент вектора математической модели

Zn=

Полный вектор математической модели измерений для разных значений можно представить в виде

Z=MA,

где

M = ,

АТ = [ ].

Представим функцию качества аппроксимации в виде

J=.

Выражение является весовым коэффициентом, позволяющим учитывать в большей мере более точные измерения и в меньшей не точные. Представим это выражение в матричном виде

J = (W-Z)T D (W-Z).

Здесь D диагональная матрица, элементами которой являются величины .

Используя зависимость для вектора Z получим

J=(W-MA)T D (W-MA).

Это выражение зависит от коэффициентов (i = 1,2,…,N). Необходимо найти такие значения их, чтобы J было минимальным. Используем для этого необходимое условие минимума, производные функции J по переменным в точке минимума должны быть равны нулю. Отсюда получим для производной

= -2MT D (W-MA).

Приравнивая нулю и выделяя неизвестные получим

*MTDMA =MTDW.*

Это система линейных алгебраических уравнений с неизвестным вектором A. Решая ее каким либо методом, найдем численные значения коэффициентов (i = 1,2,…,N) аппроксимирующей функции.

**Задание к выполнению лабораторной работы**

Задан вид функции, значение которой надо вычислить в точках X = [1,2,…,10]. К вычисленным значениям функций необходимо прибавить ошибку измерений с заданной среднеквадратической погрешностью σ, нулевым математическим ожиданием, распределенную по гауссовскому закону. Величину σ определяем по формуле σ = рσ0. Значение σ0 равно единице. Значение р задано в таблице 1 для каждого варианта. Это будет вектор измерений W. Используя базисные функции, заданные в таблице1, вектор измерений и среднеквадратическую погрешность вектора измерений вычислить вектор коэффициентов аппроксимирующей функции.

Для контроля правильности работы программ с помощью графических средств ЭВМ на дисплее изобразить график аппроксимирующей функции и точки измерений с погрешностями - вектор W, по которым строилась эта функция.

При защите лабораторной работы знать вывод формул метода наименьших квадратов с весовыми коэффициентами.

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4**

**УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ**

Рассмотренный в предыдущей лабораторной метод построения апп роксимационной зависимости справедлив в том случае, если процесс зависит от одного аргумента и известна среднеквадратическая погрешность каждого измерения. В тоже время при решении научных и технических задач часто возникает задача, когда аппроксимируемая функция зависит от некоторого количества аргументов, причем часть их неизвестна, неизвестна так же среднеквадратическая погрешность замеров. Необходимо построить наилучшую аппроксимирующую функцию. В этом случае для аппроксимации в качестве аргументов берут известные переменные. Неизвестные переменные, которые влияют на действительное значение функции, считаем шумом, характеристики которого надо определить по результатам эксперимента. Обозначим число экспериментов N, полученные в эксперименте результаты вектором Y. Для выбора вида аппроксимирующей функции нет строгого однозначного правила. Обычно используют физические соображения о характере процесса, метод перебора функций и сравнение полученных результатов. Считаем, что аппроксимируемый процесс имеет вид

,

где  - функции, зависящие от используемых аргументов, их называют регрессоры, вычисленные при заданных значениях аргументов;

AT… – вектор действительных коэффициентов процесса, которые надо оценить; ԑ - гауссовский шум.

Принимают следующие допущения: случайные величины ԑ распределены по нормальному закону с одинаковой для всех измерений дисперсией , нулевым математическим ожиданием и не коррелированны между собой.

Математическую модель процесса представим в виде

= ,

а математическую модель вектора измерений, полученного в эксперименте

=F,

где F = - матрица регрессоров – регрессоры, вычисленные при значениях аргументов, задаваемых в очередном эксперименте; = [] – вектор оценки действительных коэффициентов вектора a.

Вектор оцениваем по методу наименьших квадратов, минимизируя функцию

*J* = [*Y-*]T [*Y-*]T = [*Y- F*]T[*Y- F*].

Вычисляя ее первые производные и приравнивая их нулю получим систему линейных алгебраических уравнений для определения оценок коэффициентов модели

FTF = FTY.

Решение ее имеет вид

.

Проверку точности математической модели осуществляем вычисляя величины, характеризующие близость задания уравнения регрессии к действительной функции, по которой происходит процесс. Для этого вычисляем величины

= *,*

*,*

характеризующие качество математической модели. Вычисляем величину

.

Чем она ближе к единице, тем точнее математическая модель. В случае плохой информированности о виде математической модели проводят оценку ее качества с использованием критерия Фишера. Для этого вычисляем величины

, где , .

Задаем уровень значимости α, вычисляем число степеней свободы *k-1, N-k* и по таблице распределения Фишера находим критическое значение

.

Если F>=FT, то коэффициент множественной корреляции значим, математическая модель процесса содержит аргументы действительного процесса и необходимо дальше уточнять модель. Если F<FT, то модель плохая и необходимо уточнять ее.

После получения окончательной модели осуществляем проверку значимости ее коэффициентов, т.е. есть ли коэффициенты, которые получились отличными от нулевых в реальном процессе только вследствие наличия ошибок измерений. Для этого оцениваем по результатам эксперимента дисперсию ошибок измерений, которая нам неизвестна. В случае, если она оценивается по результатам экспериментов, проведенных при одних и тех же значениях аргументов, дисперсию вычисляем по зависимостям

, .

Вычислим дисперсии оценки коэффициентов математической модели. Для этого используем зависимости

=(FTF)-1, = .

Для проверки значимости вычисленного коэффициента вычисляем величину

.

Зная *ti* по таблице распределения Стюдента и числа степеней свободы *l – 1* для заданного уровня значимости α находят критическое значение . Если то коэффициент  незначим и его не надо использовать в модели регрессии. Если , то его нельзя объяснить действием случайных факторов, он значим и его можно использовать в модели. Если есть незначимые коэффициенты, то их удаляют из модели и вычисляют коэффициенты новой математической модели, и их снова проверяют на значимость. Осуществляют это до тех пор, пока все коэффициенты будут значимыми.

После того, как получили окончательную математическую модель процесса вычисляют доверительные интервалы ее коэффициентов. Для этого, при заданном уровне значимости α, числе степеней свободы *l-1* по таблицам распределения Стъюдента находят *tГР*. Доверительный интервал определяют по формуле

В нем с вероятностьюнаходится точное значение коэффициента уравнения регрессии.

**Задание к выполнению лабораторной работы**

В таблице 2 находятся результаты эксперимента для определения функции, зависящей от двух аргументов. Эксперименты 1 – 12 использовать для оценки коэффициентов математической модели , эксперименты 13 – 22 использовать для оценки дисперсии погрешности измерений .

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5**

**МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ**

Во многих технических и научных задачах возникает необходимость найти математическую модель процесса или системы, для которых известен вид математической модели, но неизвестны ее коэффициенты. В этом случае чаще всего используют метод максимального правдоподобия. При его использовании оценку коэффициентов модели осуществляют используя уравнения этой модели, вектор наблюдений за поведением исследуемой системы, математическую модель вектора измерений. В качестве вектора наблюдений *Ri* (*i=1,2,…,N*) быть значения одной или нескольких выходных координат системы в известные моменты времени *ti*, либо некоторая функция от них. Математическую модель вектора измерений обозначим Z(ϴ), где ϴ - вектор оцениваемых параметров, состоящий из К элементов. Вектор измерений состоит из суммы точного значения измерений D и гауссовской ошибки измерений σ. Известна корреляционная матрица ошибок измерений *Кv*. Математическое ожидание ошибки измерений равно нулю.

Разность вектора измерений и его математической модели, вычисленной для некоторого значения вектора оцениваемых параметров ,

,

является вектором случайных величин, распределенным по нормальному закону, и описывается условной функцией плотности вероятности

.

Необходимо найти такое значение вектора , чтобы эта функция плотности вероятности имела максимальное значение. Максимум этой функции достигается при минимуме выражения

.

Воспользовавшись необходимым условием минимума, получаем систему *К,* в общем случае нелинейных, алгебраических уравнений для вычисления *К* компонент вектора оцениваемых параметров .

,

где .

Это уравнение называется уравнением правдоподобия. Для решения этой системы уравнений наиболее часто используют метод Ньютона, основанный на линеаризации функции Z. Для этого разложим Z относительно заданного значения в ряд Тейлора с учетом линейных членов разложения

Матрица L первых производных, вычислена при .

Подставляя эту зависимость в уравнение правдоподобия и приводя подобные члены получим систему линейных алгебраических уравнений для вектора подшагивания к оцениваемому вектору

Решение в матричном виде системы имеет вид

где .

Решая эту систему каким – либо методом получаем величину подшагивания . Таким образом, процесс оценки неизвестных параметров итерационный. Новое значение оцениваемого вектора параметров равно

Вычисления прекращаем по условию || < ԑ, где ԑ некоторое заданное число исходя из решаемой задачи.

Одной из характеристик оцененных параметров, являющихся случайными величинами, есть их точность, мерой которой является корреляционная матрица. Она вычисляется по формуле

.

**Цель лабораторной работы**: оценить, по данным измерений, неизвестные параметры системы методом максимального правдоподобия и определить точность этой оценки.

Содержание работы

Исследуемый процесс определяется системой дифференциальных уравнений (таблица 3)

В процессе исследования с помощью аппаратных средств в моменты времени , (где N-число измерений) произведены замеры вектора измерений R (таблица 3), зависящего от переменных x1, x2 этой системы, а так же от оцениваемых параметров - вектор ϴ

.

Измерения производятся со случайной ошибкой V, распределенной по нормальному закону. Параметры закона распределения известны. Задана диагональная корреляционная матрица ошибок измерений, шаг интегрирования системы дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутта четвертого порядка, задана математическая модель вектора измерений. По имеющимся измерениям необходимо оценить неизвестные параметры процесса. Неизвестными параметрами, вектор , в зависимости от варианта могут быть начальные условия для системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс, коэффициенты системы уравнений. В задании даны примерные начальные значения оцениваемых параметров для обеспечения сходимости вычислительного процесса. Для оценки неизвестных параметров необходимо использовать метод максимального правдоподобия.

**Расчетный алгоритм при выполнении лабораторной работы имеет вид.**

Задаем начальные значения вектора оцениваемых параметров (конкретный вариант таблица 3)

*.*

Интегрируем систему дифференциальных уравнений исследуемого процесса, получаем значения и в заданные моменты времени запоминаем значения математической модели вектора измерений Z.

Для нахождения величины подшагивания

на 1 шаге итерационного процесса при значении вектора оцениваемых параметров

выполняем следующее:

а) вычисляем обратную матрицу :

б) вычисляем матрицу *L* частных производных

(i=1, 2), (j=1, 2,…N) методом конечных разностей. Для этого проводим два интегрирования системы дифференциальных уравнений при

, ,

где -величина вариации оцениваемых параметров равная 0,1. получаем значение функции и (i=1,2,…,N). Проводим еще два интегрирования при

,

.

Снова получаем значение функции и . Используя полученные данные, вычисляем методом конечных разностей элементы матрицы *L*

;

в) вычисляем вектор

,

где R-вектор экспериментальных значений, указанных в конкретном варианте задания; Z - вектор вычисленных значений математической модели при

*;*

г) проводим транспонирование матрицы *L*;

д) используя полученные данные, вычисляем вектор

е) вычисляем новое значение вектора оцениваемых параметров

= +

Повторяем рассмотренную последовательность вычислений с новыми значениями вектора . Получаем

Процесс повторяем до тех пор, когда для очередного *j* – го шага для выполнится условие . Полученное значение

и будет вектором оцениваемых параметров. По имеющимся значениям параметров процесса вычисляем корреляционную матрицу погрешностей оценки неизвестных параметров

.

**Лабораторная работа №5**

Метод максимума функции апостериорной вероятности

(байесовский метод)

*Цель работы:* исследование точности оценки неизвестных параметров системы по данным измерений методом максимальной апостериорной вероятности.

Содержание работы

Исследуемый процесс определяется системой дифференциальных уравнений:

В процессе исследования, с помощью аппаратных средств, в моменты времени (*i = 1, 2, …, N),* (где N –число измерений), производятся замеры функции , зависящей от переменных этой системы

.

Измерения производятся со случайной ошибкой V, распределенной по нормальному закону. По этим измерениям необходимо оценить неизвестные параметры процесса – вектор , компонентами которого являются начальные условия системы дифференциальных уравнений. Возможные значения оцениваемых параметров заданы математическим ожиданием и корреляционной матрицей .

Между случайными векторами и имеется статистическая связь – изменение ведет к изменению . Формула Байеса, задающая статистическую связь между и , записывается в виде:

где – функция, задающая плотность вероятности значения оценки неизвестных параметров при заданном векторе наблюдений ; – функция плотности вероятности вектора оцениваемых параметров; – априорная функция плотности вероятности вектора оцениваемых параметров; – функция плотности вектора наблюдений.

Необходимо найти такое значение , при котором функция будет максимальна, функция условной плотности вероятности оцениваемых параметров будет принимать наибольшее значение при максимальном значении произведения . Так как и распределены по нормальному закону, можно записать

где - вектор наблюдений, вычисленный с помощью математической модели; – корреляционные матрицы погрешностей, – математическое ожидание оцениваемых параметров.

Тогда

*где*

*J =*

Максимум достигается при минимуме значения *J.* Отсюда следует, что искомая оценка является решением системы уравнений:

или ,

или

Решение системы получаем, используя линеаризацию вектора .

Имеем:

.

Подставим линеаризованную зависимость в систему уравнений:

Отсюда можем получить выражение для вычисления очередного значения подшагивания при нахождении корней системы уравнения, являющихся оценками неизвестных параметров .

Расчетные алгоритм имеет вид:

1. Задаем начальные значения вектора оцениваемых параметров

=

1. Интегрируем систему дифференциальных уравнений исследуемого процесса и в заданные моменты времени запоминаем значения функции S.
2. Для нахождения величины подшагивания = , выполняем следующее:
3. По заданной матрице = находим матрицу , где – заданная в каждом варианте дисперсия погрешностей оцениваемых параметров;
4. По заданной корреляционной матрице погрешностей измерений = находим матрицу , где = 20;
5. Вычисляем матрицу частных производных методом конечных разностей. Величину вариации взять равной 0, 001;
6. Проводим транспонирование матрицы ;
7. Вычисляем
8. Повторяем пп. 2, 3 с новыми значениями вектора , где = + , до тех пор, пока .
9. Получили значение вектора .

Файл лаба 5 - табл